

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПОЗИЦИОННЫЕ ДИАГРАММЫ

И.В. Чумаченко, канд. техн. наук.

Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского "ХАИ"

Предлагается при разработке алгоритмического и программного обеспечения для сложных систем обработки информации и управления использовать математический аппарат - расширенную алгебру с коммутативными условиями для регулярных схем алгоритмов. В связи с ростом количества условий возникает необходимость более наглядного и компактного представления схем алгоритмов в виде алгоритмических позиционных диаграмм. Приводятся определения, правила, примеры и анализ диаграмм с целью выбора оптимальной структуры алгоритма.

Пропонується при розробці алгоритмічного і програмного забезпечення для складних систем обробки інформації і управління використати математичний апарат - розширену алгебру з комутативними умовами для регулярних схем алгоритмів. У зв'язку із зростанням кількості умов виникає необхідність більш наочне і компактно представлення схем алгоритмів у вигляді алгоритмічних позиційних діаграм. Приводяться визначення, правила, приклади і аналіз діаграм з метою вибору оптимальної структури алгоритму.

It is offered by development algorithmic and software for systems of processing of the information and management to use the mathematical device - extended algebra with commutative conditions for the regular algorithms schemes. In connection with growth of quantity of conditions there is a necessity of more evident and compact representation of the algorithms schemes as the algorithmic position diagrams. The definitions, rules, examples and analysis of the diagrams are resulted with the purpose of a choice of optimum structure of algorithm.

При разработке алгоритмического и программного обеспечения для сложных систем обработки информации и управления необходимо использовать математический аппарат, с помощью которого техника формальных преобразований схем алгоритмов была бы более простой и удобной. В качестве такого математического аппарата ранее предложена расширенная алгебра с коммутативными условиями для регулярных схем алгоритмов (РАКУРС) [1]. Особенностью рассматриваемой алгебры является то, что на множестве условий определено всё множество логических функций, а не только простейшие логические преобразования из существующих систем алгоритмических алгебр [2, 3].

Несмотря на эффективность и формализуемость РАКУРС с ростом количества условий задача преобразования схем алгоритмов значительно усложняется из-за громоздких вычислений [4]. В связи с этим возникает необходимость более наглядного и компактного представления схем алгоритмов, по-

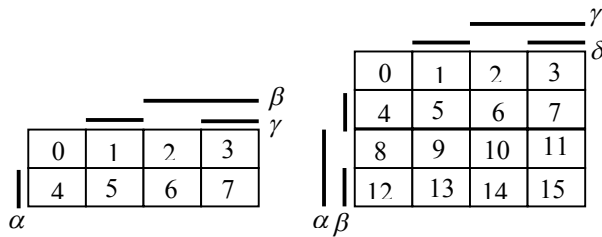
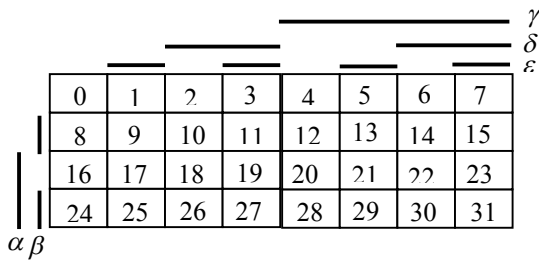
зволяющего эффективнее производить преобразования с целью выбора оптимальной структуры алгоритмов.

Для представления совершенной дизъюнктивной нормальной формы алгоритма (СДНФА) в РАКУРС предлагается использовать алгоритмические позиционные диаграммы (АПД). Базой для создания АПД явилась широко известная карта Карнау (диаграмма Вейча) [5, 6].

Определение 1. *Алгоритмическая позиционная диаграмма* – прямоугольная таблица специального вида, задающая схему алгоритма и используемая для нахождения совершенной дизъюнктивной нормальной формы алгоритма.

АПД представляют собой прямоугольники с соотношением сторон 1:1 или 1:2, в которых значения условий представлены по сторонам диаграммы. Область ячеек диаграммы, соответствующих выполнению условия, отмечается соответствующей линией, а невыполнение условия – отсутствием ее. Каждому

произведению условий в СДНФА соответствует ячейка АПД, номер которой определяется как десятичный эквивалент двоичного n -разрядного числа, где n – количество условий. Номер ячейки АПД формируется следующим образом: если условие входит в инверсном виде, то соответствующий ей разряд двоичного числа равен “1”, иначе – “0”. На рис. 1, 2 и 3 приведены примеры АПД с указанием номеров ячеек при $n=3, 4$ и 5 соответственно.

Рис. 1. АПД при $n = 3$ Рис. 2. АПД при $n = 4$ Рис. 3. АПД при $n = 5$

Пусть алгоритм описывается множеством операторов $P = (P_1, \dots, P_k)$ и множеством условий $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$, тогда, в общем случае, СДНФА имеет вид:

$$A = \Pi_1^{U_1} \vee \dots \vee \Pi_i^{U_i} \dots \vee \Pi_n^{U_n},$$

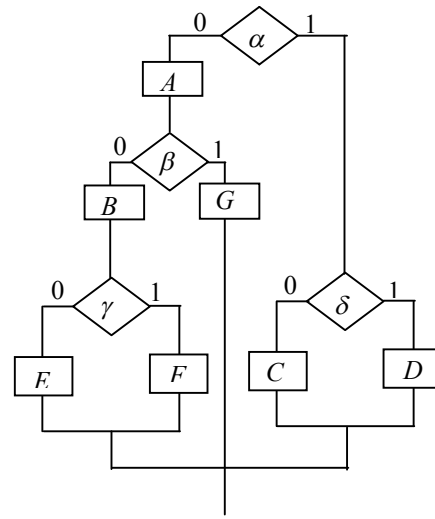
где $\Pi_i^{U_i}$ - произведение соответствующих операторов, реализуемое при выполнении условия $U_i = 1$;

U_i - конъюнкция соответствующих условий.

Правило заполнения АПД. Каждому члену СДНФА $\Pi_i^{U_i}$ соответствует ячейка АПД, в которую записывается произведение соответствующих операторов Π_i .

Пример 1. Пусть существует схема алгоритма A_1 , приведенная на рис. 4. Рассмотрим и

сравним изображения алгоритма A_1 в СДНФА и АПД.

Рис. 4. Пример схемы алгоритма A_1

Алгоритму A_1 соответствует в РАКУРС следующее выражение:

$$A_1 = ((D \vee C)^\delta \vee A(G \vee B(F \vee E)^\gamma)^\beta)^\alpha.$$

Преобразуем данное выражение в дизъюнктивную нормальную форму алгоритма (ДНФА):

$$\begin{aligned} A_1 &= (D \vee C)^{\alpha\delta} \vee A(G \vee B(F \vee E)^\gamma)^{\alpha\beta} = \\ &= D^{\alpha\delta 1} \vee C^{\alpha\delta 0} \vee AG^{\alpha\beta 1} \vee AB(F \vee \\ &\vee E)^{\alpha\beta 0 \gamma} = D^{\alpha\delta 1} \vee C^{\alpha\delta 0} \vee AG^{\alpha\beta 1} \vee \\ &\vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1} \vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1}. \end{aligned}$$

ДНФА алгоритма A_1 преобразуется в СДНФА следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= D^{\alpha\delta 1(\beta 0 \vee \beta 1)(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee C^{\alpha\delta 0(\beta 0 \vee \beta 1)(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee \\ &\vee AG^{\alpha\beta 1(\gamma 0 \vee \gamma 1)(\delta 0 \vee \delta 1)} \vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1(\delta 0 \vee \delta 1)} \vee \\ &\vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1(\delta 0 \vee \delta 1)} = D^{\alpha\delta 1\beta 0\delta 1(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee D^{\alpha\delta 1\beta 1\delta 1(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee \\ &\vee C^{\alpha\delta 1\beta 0\delta 0(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee C^{\alpha\delta 1\beta 1\delta 0(\gamma 0 \vee \gamma 1)} \vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 0(\delta 0 \vee \delta 1)} \vee \\ &\vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 1(\delta 0 \vee \delta 1)} \vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 0} \vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 1} \vee \\ &\vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 0} \vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 1} = D^{\alpha\delta 1\beta 0\gamma 0\delta 1} \vee D^{\alpha\delta 1\beta 0\gamma 1\delta 1} \vee \\ &\vee D^{\alpha\delta 1\beta 1\gamma 0\delta 1} \vee D^{\alpha\delta 1\beta 1\gamma 1\delta 1} \vee C^{\alpha\delta 1\beta 0\gamma 0\delta 0} \vee C^{\alpha\delta 1\beta 0\gamma 1\delta 0} \vee \\ &\vee C^{\alpha\delta 1\beta 1\gamma 0\delta 0} \vee C^{\alpha\delta 1\beta 1\gamma 1\delta 0} \vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 0\delta 0} \vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 0\delta 1} \vee \\ &\vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 1\delta 0} \vee AG^{\alpha\beta 1\gamma 1\delta 1} \vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 0} \vee \\ &\vee ABF^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 1} \vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 0} \vee ABE^{\alpha\beta 0 \gamma 1\delta 1}. \end{aligned}$$

Алгоритму A_1 соответствует АПД, представленная на рис. 5.

		γ			
		δ			
α	β	ABE	ABE	ABF	ABF
		AG	AG	AG	AG
		C	D	C	D
		C	D	C	D

Рис. 5. Пример АПД алгоритма A_1

Из приведенного примера можно сделать вывод, что АПД алгоритма A_1 полностью соответствует СДНФА алгоритма A_1 и является более наглядным и компактным представлением схемы алгоритма для дальнейших преобразований с целью выбора оптимальной структуры.

Для дальнейших преобразований АПД введем следующие определения.

Определение 2. Конфигурацией АПД называется множество ячеек алгоритмической позиционной диаграммы, соответствующих определенному произведению условий.

Определение 3. Рангом конфигурации АПД называется количество описывающих конфигурацию условий.

Определение 4. Длиной конфигурации АПД называется максимальный номер ячейки конфигурации.

Определение 5. Мощностью конфигурации АПД называется количество ячеек конфигурации.

Введем следующие обозначения:

K_j - конфигурация АПД;

r_j - ранг конфигурации АПД;

d_j - длина конфигурации АПД;

M_j - упорядоченное множество номеров ячеек АПД, соответствующих K_j ;

S_j - мощность конфигурации АПД.

С учетом введенных обозначений для АПД с n условиями мощность S_j множества M_j , соответствующего конфигурации K_j ранга r_j , определяется как $S_j = 2^{n-r_j}$. На рис. 6 - 11 приведены примеры конфигураций на АПД и соответствующие им характеристики при $n=4$.

		γ			
		δ			
α	β				
		8	9	10	11
		12	13	14	15

Рис. 6. АПД при $K = \alpha$,

$r = 1, d = 15,$

$M = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\},$

$S = 8$

		γ			
		δ			
α	β				
		8	9	10	11

Рис. 7. АПД при $K = \alpha\bar{\beta}$,

$r = 2, d = 11,$

$M = \{8, 9, 10, 11\},$

$S = 4$

		γ			
		δ			
α	β		1		3
			5		7

Рис. 8. АПД при $K = \alpha\bar{\alpha}\delta$,

$r = 2, d = 7, M = \{1, 3, 5, 7\},$

$S = 4$

		γ			
		δ			
α	β				
		4		6	
		12		14	

Рис. 7. АПД при $K = \beta\bar{\delta}$,

$r = 2, d = 14, M = \{4, 6, 12, 14\},$

$S = 4$

		γ			
		δ			
α	β				
				11	
				12	

Рис. 10. АПД при $K = \alpha\gamma\delta$,

$r = 3, d = 15, M = \{11, 15\},$

$S = 2$

		γ			
		δ			
α	β				
				11	

Рис. 11. АПД при $K = \alpha\beta\gamma\delta$,

$r = 4, d = 11, M = \{11\},$

$S = 1$

Задача. Определить общее количество конфигураций $W_{n,r}$ ранга r АПД для n условий.

Решение. Существует C_n^r способов выбора номеров условий. Каждое условие может входить в запись конфигурации АПД в прямом или инверсном виде. Количество конфигураций с заданными номерами, отличающиеся только видом вхождения условий, равно 2^r . Следовательно, количество конфигураций определится выражением:

$$W_{n,r} = 2^r \cdot C_n^r$$

Очевидно, что общее количество всех возможных конфигураций W_n АПД для n условий определится выражением:

$$W_n = \sum_{r=1}^n W_{n,r} = 2^1 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n.$$

Разобьем множество конфигураций на подмножества, имеющие одинаковую длину

$d = 0, 2^n - 1$. Примерами конфигураций при $n = 4$,

$d = 7$ и фиксированном ранге $r = 2$ являются:

$$K_1 = \bar{\alpha}\gamma; \quad M_1 = \{2,3,6,7\}$$

$$K_2 = \bar{\alpha}\beta; \quad M_2 = \{4,5,6,7\}$$

$$K_3 = \bar{\alpha}\delta; \quad M_3 = \{1,3,5,7\}$$

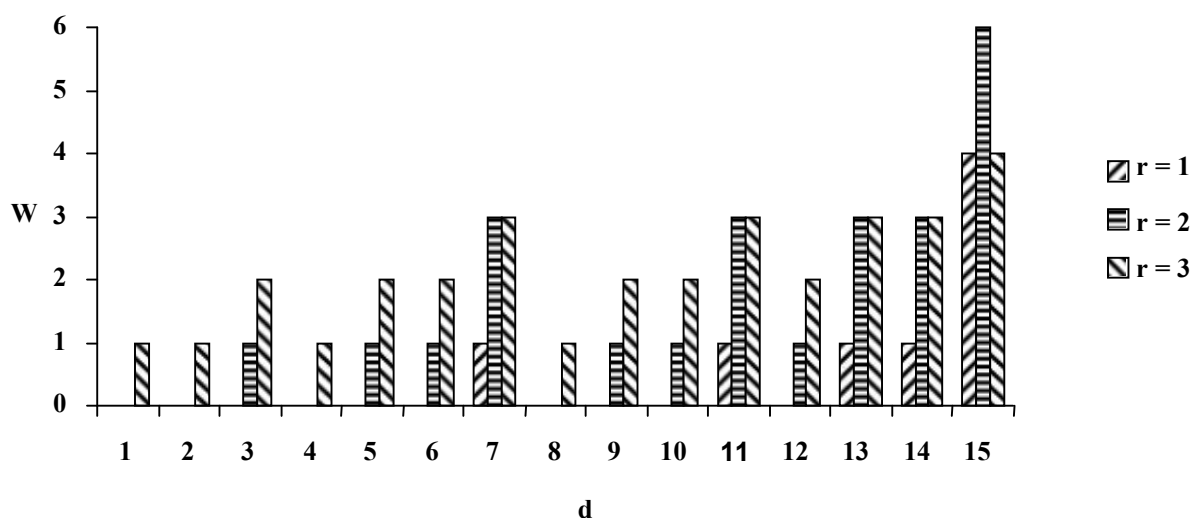


Рис.13

Проведено исследование по определению количества конфигураций в зависимости от n, r, d . На рис. 12 приведена диаграмма зависимости количества конфигураций от длины конфигурации d при $n = 3$.

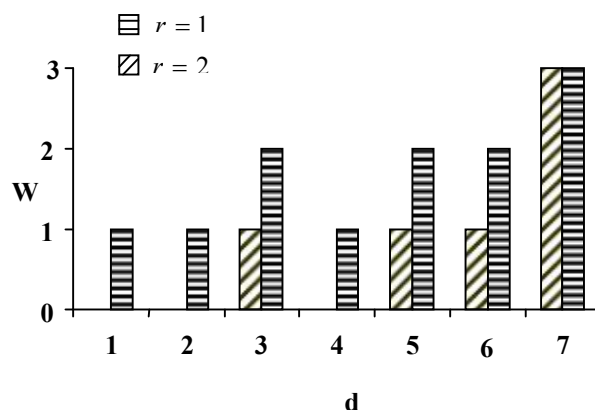


Рис.12

На рис. 13 приведена диаграмма зависимости количества конфигураций от длины конфигурации d при $n = 4$.

АПД от n условий можно представить в виде объединения соответствующих АПД от $(n-1)$ условий и, наоборот. Возможна декомпозиция АПД n условий на АПД $(n-i)$ условий. На рис. 14 приведен пример декомпозиции АПД.

Приведенная декомпозиция АПД позволяет выбирать оптимальную структуру алгоритма путем перестановки условий.

Известная карта Карнау используется для задания значений булевых функций и может являться частным случаем АПД.

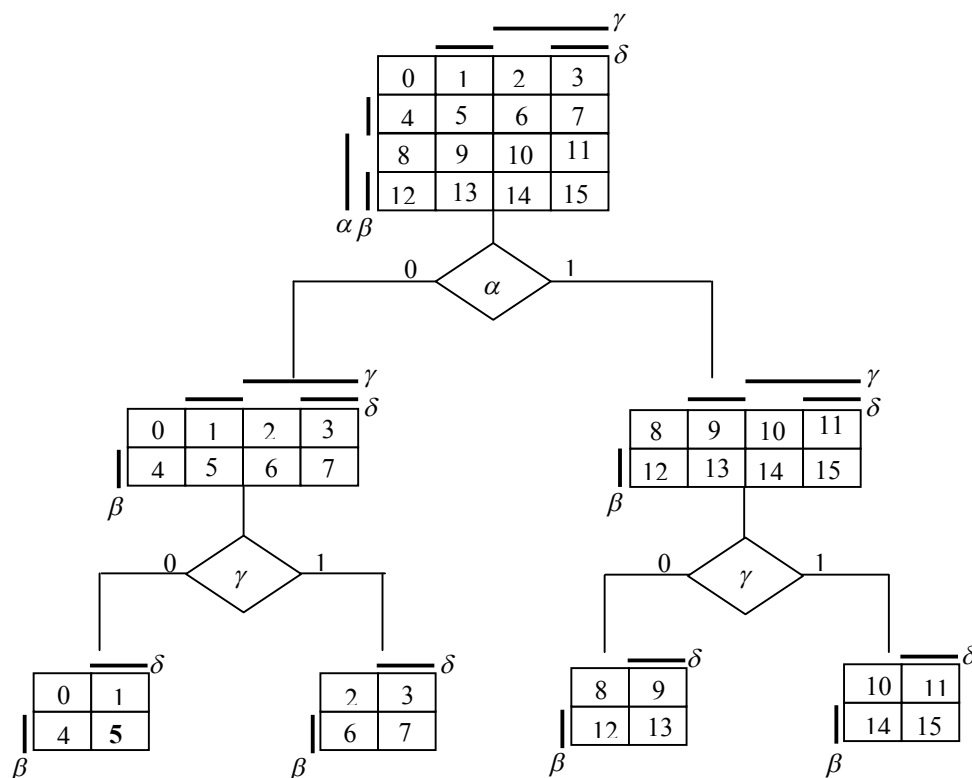


Рис.14

Литература

1. Чумаченко И.В. Расширенная алгебра регулярных схем алгоритмов с коммутативными условиями//Авиационно-космическая техника и технология: Сб. науч. тр.– Харьков: Нац. аэрокосмич. ун-т “ХАИ”.- 2001.- Вып. 20 .- С.154-158.
2. Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Математические основы проектирования рекурсивных автоматов с программируемой логикой: Монография - Харьков: Факт, 1999. - 144 с.
3. Жихарев В.Я., Илюшко В.М., Чумаченко И.В. Проектирование электронных компиляторов: Монография - Харьков: Факт, 1999. - 88 с.
4. Чумаченко І.В. Комп’ютерна програма “Програма визначення еквівалентності алгоритмів”: Свідство про Державну реєстрацію прав автора нв твір ПА №3707. – Зареєстровано в Державному департаменті інтелектуальної власності Міністерства освіти і науки України; Реєстр. 11.08.2000; Вид. 11.09.2000.
5. Karnaugh M. The map method for synthesis of combinational logic circuits. “Transactions of the American institute of electrical engineers”, 1953, v. 72, №1.
6. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов.-М.: Физматгиз, 1962.-476с.